



TITLE:

# 統計学の新たなフロンティアとしての量子統計 (量子論における統計的推測の理論と応用)

AUTHOR(S):

田中, 冬彦

---

CITATION:

田中, 冬彦. 統計学の新たなフロンティアとしての量子統計 (量子論における統計的推測の理論と応用). 数理解析研究所講究録 2013, 1834: 1-25

ISSUE DATE:

2013-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194887>

RIGHT:

# 統計学の新たなフロンティアとしての量子統計

東京大学・情報理工学系研究科 田中冬彦

Fuyuhiko Tanaka

Graduate School of Information Science and Technology,  
The University of Tokyo

## Abstract

本研究集会は、統計学の理論と量子物理との連携を目指して開催された。量子物理における実験技術の進展とそれに伴う応用という観点から、一部の物理研究者の間では、既に現代的な統計手法の重要性が認識されつつある。一方で、統計学と量子物理の間の連携は、従来、全く想定されていなかったため、理学と工学といったカリキュラムの壁もあり、交流の機会すら皆無だった。本稿では、まず、喫緊の課題として量子トモグラフィを挙げ、平易な例によって統計学と量子物理での協働のイメージを説明する。次に、このような新しい協働には様々な障壁があることを具体例を交えて説明する。そのうえで、これまで不明瞭だった量子物理と統計学の新たな融合領域としての量子統計を規定する。最後に、数学・数理科学と諸科学・産業との新たな連携を進めていく際に直面する課題について言及する。

## 1 Introduction

### 1.1 経緯

本研究集会は、科学技術振興機構（JST）「数学と諸分野との協働によるブレークスルーの探索」領域（略称：数学領域）における、著者の研究活動が発端となっている。ここでいう数学とは広い意味の数学であり、統計学も数学（応用数学）という位置づけである。一方で諸分野として、ここでは量子物理分野を想定している。著者は、研究課題「統計モデル多様体の普遍的な性質のベイズ予測理論への応用」が JST 数学領域（さきがけ型）で採択され、統計学の新たなフロンティアとしての量子物理との協働を模索してきた。その地道な活動は、研究期間終了の現在も続いており、本講究録の元となる共同利用研究集会を開催する所まで何とかこぎつけた。

異なる分野間での連携というのは、口で言うのは簡単であるが、実際には非常に苦労する作業である。数学では個人かせいぜい数名程度での研究がほとんどと思われるが、異なる分野への応用を本気で目指す場合には、一般にもっと多くの人々が関わることになり、狭い話題を深く掘り下げるタイプの研究とは全く異なる難しさが現れてくる。

著者は、自身の体験と様々な関連事例の洞察を踏まえ、折に触れこの苦勞と解決方法を話してきた。ただし、一般的な研究集会では、自分の研究発表の中で補足的にスライド1～2枚で簡単に紹介する程度である。極めてクローズドに近い形態のセミナーで、同じような困難に直面している聴衆が想定される場合には、もう少し詳しく話したケースもある。しかし、誰もが確認できる文章の形で残す機会はなかった。ここでは、著者自身の経験に基く話と目指している連携について、やや丁寧に説明しておき、本講究録全体の序文とする。

## 1.2 本稿について

著者を含め、主に JST 数学領域の研究者間で共有している連携のためのノウハウ（連携ノウハウ）は膨大なものになる。これは、異なる分野間の人的交流から、具体的な共同研究、そして連携による成果を出すまでの一連のプロセスがいかに難しいものであるかを物語っている。実際、企業内の連携に関しても、社員同士が協力できない原因の分析や解決方法、成功している企業の事例だけで一冊の本ができあがる [14]。数学と諸分野間の研究上の連携においても同様であろう。

本稿の3節と5節は連携ノウハウの一部を紹介するつもりで書いた。様々な分野の人にとって有益な情報になることを期待して丁寧に書いたため、全体として数ページの予定が意外に量が増えてしまった。それでも、技術的な詳細に触れていないため、専門が近い人が読んだ時に疑問や誤解が生じる余地が残っている。また、一般的な連携ノウハウとして重要にも関わらず、統計学と量子物理の連携を中心に据えたため触れていない話題もある。後者について、まとまった文章の形で残すのはまた別の機会としたい。

本稿の構成は以下になる。2節では、統計学と量子物理で連携して取り組むべき課題の例を量子トモグラフィの簡単なケースで説明する。唯一数式が出てくる節であり、物理学科の学部生レベルの知識で読みとおせると考えている。2.4節の内容は統計研究者にも理解しやすいと思う。3節では、2節で述べたような連携を進めるにあたって、どのような障壁があったのか具体例を交えながら説明する。専門以外の人にも意味が伝わるよう、たとえ話を盛り込んでいる。4節では融合領域としての量子統計のコンセンサスをはかる。やや技術的な話題にも触れる。最後に5節で異なる分野との連携を模索する段階で学んだことや問題点を掲げておく。異分野間連携の事例とノウハウに興味がある読者は、3節と5節を読まれるとよい。

なお、本稿のタイトルにある量子統計とは、量子系における統計的推測 (Quantum Statistical Inference) のことを指している。統計物理や統計力学とは別物であり、粗く言うと、数理統計学 (Mathematical Statistics) の延長と考えていただきたい。他分野から見た時の数理統計学には誤解も多いため、2節と3節で説明した後量子

統計の定義を与えている。

## 2 統計学と量子物理が連携して取り組むべき課題の例

統計学と量子物理の連携で何を目指したいのか、量子トモグラフィを例にして説明する。ただし、本稿では技術的な側面に深入りはしない。

### 2.1 量子状態トモグラフィ

量子トモグラフィとは有限の実験データから、量子系を特徴づける行列（密度行列、密度作用素とも呼ばれる）を推定する作業であり、現在、様々な実験分野で行われている。

トモグラフィとは、本来、複数の角度から X 線で投影した際のレントゲンデータ（2次元データ）を複数組み合わせることで、人体の立体的なデータ（3次元データ）を再構成する作業であり、医療分野で古くから使われてきた。数学的にはラドン変換をもちいた逆問題として定式化される。

量子光学系においても、複数の測定データから逆ラドン変換を用いて、量子光学系を記述する密度作用素を推定することができる。これが、量子トモグラフィの発端であり、名前のゆえんである。現在では、量子トモグラフィは光学系に限らず、上のような意味で使われている。なお、より正確には、上は量子状態トモグラフィと呼ばれる。他にも、量子状態の変化を推定したい場合には、量子プロセストモグラフィのように量子〇〇トモグラフィと呼ぶ。本稿では、量子状態トモグラフィを量子トモグラフィと略記する。

### 2.2 量子状態トモグラフィにおける統計的な問題

次に、現在、この分野で直面しつつある問題について説明する。できるだけ平易に説明したいが、observable など物理学科の学部生レベルの用語は使わざるをえない。統計学の諸分野への応用の事例として本稿を読んでいる読者は、この部分は読み飛ばしてもよい。

光学系の場合の量子トモグラフィは、いわゆる Wigner 関数の推定に帰着されるのだが、統計学でいうノンパラメトリック推定の要素が入ってくる。統計学的な問題の本質を説明するため、ここでは有限次元ヒルベルト空間で記述される系（スピンや角運動量、有限のエネルギー準位など）の量子トモグラフィで説明する。ヒルベルト空間の次元を  $d$  とすると、推定すべき密度行列は  $d^2 - 1$  の実数パラメータで特徴づけられる。これらのパラメータは測定可能な物理量の期待値としてあら

わされる（期待値パラメータと呼ぶ。）密度行列を  $\rho$ , 観測する物理量 (observable) を  $W$  とあらわすと期待値パラメータは

$$w := \text{Tr} W \rho$$

で与えられる. 通常の物理の記法では  $\text{Tr} \hat{W} \hat{\rho}$  のように書くべきかもしれないが, 数学の慣習に従っている. さて, 実際に測定によって得られる  $N$  個のデータ  $w_1, \dots, w_N$  に対して,

$$\bar{w} := \frac{w_1 + \dots + w_N}{N} \xrightarrow{P} w$$

が成立する（大数の弱法則）. 確率収束になじみのない読者は, データ数  $N$  が十分大きいとデータ平均は真の値  $w$  に近づくといったイメージで十分である.

以上のことをもう少し具体的に説明する. まず, 2次元系であれば密度行列は以下の形にかけられることを思い出しておく.

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

ここで,  $i := \sqrt{-1}$  であり,  $x, y, z \in \mathbf{R}$  は物理的な条件から  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  が要請される. 今, たとえばスピン  $1/2$  の原子核ビームを準備した時, そのスピン状態は上の密度行列の形で記述される.  $x, y, z$  は各々, 以下の observable の期待値パラメータになっており, ビームを準備した段階では未知であることが多い.

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

従って,  $X, Y, Z$  に対応する物理量の測定を行い, それらのデータを十分多く集めることで,  $x, y, z$  がわかり, 原子核ビームの状態が密度行列の形で記述できる. 量子力学の理論展開では, 観測されるデータと, データから密度行列を決定するプロセスを上のように説明することが多い. また, 典型的な量子情報のテキストも同様である.

ところが, この考え方では, データ数  $N$  が十分小さい時, 物理的に許される状態に対応しない可能性がある. 極端な例として  $N = 1$ , つまり物理量  $X, Y, Z$  をそれぞれ一回ずつ測定した場合を考えれば,  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$  という測定データを得る可能性もある. この値をそのまま用いると  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$  となり, 物理的に許される状態には対応しない.

このような問題はデータ数が少ないことによるもので、量子力学のテキストでもあまり触れていない。理由は明白で、実験で期待値パラメータ  $x, y, z$  を精確に知りたいなら、データ数  $N$  を増やせばよいからである。データ数を増やせばよいと気軽に書いたが、これは原理的な話である。実際にはデータ数を増やすことは、実験にかかる様々なコストの増加を意味する。それについて次節で説明する。

## 2.3 量子情報科学から量子情報技術へ

昔は、上の例にあるように少ない未知パラメータを実験データから決める場合が多く、データ数が少ないなら、データ数を増やすために時間をかければよかった。このことを戦国武将の言葉になぞらえていうならば、

データが足りない？

足りないなら、たまるまで待とうキュービット

と表現できる。このような考え方は、法則性を明らかにする、もしくは新たな理論を検証しようとする科学の立場では自然である。ところが、量子情報の台頭により、量子力学の原理を工学的に応用しようという動きが加速しつつある（例えば量子暗号）。比喩的に述べると、コンデンサーや抵抗などの各素子の性能を詳しく調べていた時代から、複数のコンデンサー、抵抗などを組み合わせた複雑な電気回路を準備して動作を確認する時代に移行してきている。したがって、より複雑な仕組み、規模の大きい系を準備する段階に入っている。 $d$  次元で記述される系を  $s$  個組み合わせる場合、全体の系は  $d^s$  次元のヒルベルト空間で記述され、 $k := d^{2s} - 1$  の実数パラメータが必要になる。

パラメータ数が増えるだけでなく、測定の準備もめんどろになる。一般に、量子論的な制約からすべての物理量は同時に測定できない。同時に（射影）測定できる物理量は可換な observable に限るため、たかだか  $d^s - 1$  個しかない（付録参照）。仮に、推定するパラメータを  $d^s - 1$  個の組に分けることができたとしても

$$\frac{d^{2s} - 1}{d^s - 1} = d^s + 1 = O(d^s).$$

程度の異なる測定を準備する必要がある。（これはかなり楽観的な見積もりである。）典型的な値を代入してみよう。たとえば、 $d = 2, s = 8$  の場合、 $2^8 = 256$  次の密度行列を推定することになる。 $k = 65535$  個の実数パラメータを決定するために、（かなり楽観的な見積もりでも）約 250 程度の異なる測定を準備する必要がある。それでも、実験装置が準備できれば、不可能ではない。実際、精密測定を要する実験では、セットアップに数カ月をかけることもある。問題は実験の目的である。

本来の実験目的は技術的な応用可能性の検証であり、すべてのパラメータを精度よく推定する必要はない。様々な技術的な応用可能性を検証しようとするたびに、以上のようなパラメータ推定のセットアップを準備するのは、はなはだ非効率的である。そのため、実験方法そのものの工夫、つまりハード面での工夫もさることながら、推定精度を保ったまま、効率のよい推定方法を提案するといったソフト面での工夫も重要になってくる。このことを戦国武将の言葉になぞらえていうならば、

**データが足りない？**

**足りなくても、推定してみせようキュービット**

ということになる。ここで強調しておきたいのは、新たな法則の発見を目的とする科学的立場と、既にわかっていることを応用する技術的立場の違いである。

余談になるが、遺伝子解析ではソフト面の工夫によって次世代シーケンサとよばれる非常に高速な解析装置が出てきた。結果として、技術的なブレークスルーが生命科学を後押しすることになった。その背景には米国における生物学者と(広い意味での)数学者の連携があったのだが、日本は様々な理由で立ち遅れている。ソフト面の工夫を無視すると量子情報も同じ轍を踏みかねないと著者は危惧している。

## 2.4 統計学の量子物理実験への貢献

本来、統計学はデータが手に入りくい状況を想定して発展してきた。例えば、農作物における最適な肥料配分を推定する場合、1年に数十パターンしか試すことができない。社会科学や医学の分野では、仮説を検証するために十分なデータがそろっていることは珍しい。データ数  $N$  が限られていることを前提にして、様々な方法が考えられてきたのである。

先の例を用いて、もっとも簡単で、かつ強力な推定方法である最尤推定法を紹介しておこう。最尤推定は統計研究者にはおなじみであるが、量子物理の研究者はよく理解していないことが多い。以下の例をきっかけに、統計研究者と量子物理の研究者が連携して研究することに興味をもってもらえれば幸いである。

ここでは  $X, Y, Z$  を射影測定するケースを考える。測定値はそれぞれ  $1, -1$  の2値をとる。それぞれ  $N$  回ずつ測定を行った場合に、 $1, -1$  が得られる回数を

$N_{x,+}, N_{x,-}$  などとかくと,

$$N_{x,+} + N_{x,-} = N,$$

$$N_{y,+} + N_{y,-} = N,$$

$$N_{z,+} + N_{z,-} = N,$$

であり, データの分布は,

$$\begin{aligned} & P(N_{x,+} = s, N_{y,+} = t, N_{z,+} = u) \\ &= C_N(s, t, u) \left( \frac{1+x}{2} \right)^s \left( \frac{1-x}{2} \right)^{N-s} \left( \frac{1+y}{2} \right)^t \left( \frac{1-y}{2} \right)^{N-t} \left( \frac{1+z}{2} \right)^u \left( \frac{1-z}{2} \right)^{N-u}, \end{aligned}$$

$$s, t, u = 0, 1, \dots, N$$

に従う. ただし,  $C_N(s, t, u) := \binom{N}{s} \binom{N}{t} \binom{N}{u}$  とおいた.

先に述べたように  $x, y, z$  は期待値であるため,  $N$  が十分大きい場合にはデータの平均を用いて推定することができる. その場合, 推定量は

$$\begin{aligned} \hat{x} &\simeq \frac{N_{x,+} - N_{x,-}}{N}, \\ \hat{y} &\simeq \frac{N_{y,+} - N_{y,-}}{N}, \\ \hat{z} &\simeq \frac{N_{z,+} - N_{z,-}}{N} \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる. ただし,  $\hat{\cdot}$  は統計学で推定量を明示する記号である.

$N$  がさほど大きくない時は, 既に述べたように上の推定量は物理的な条件を満たさない可能性がある. データを追加せずに, 密度行列の推定値を得るには例えば, 最尤推定量 (Maximum Likelihood Estimate; MLE) が考えられる. データ  $s, t, u$  を固定した下で, パラメータの関数 (尤度関数; Likelihood function)

$$\begin{aligned} & L(x, y, z) \\ &:= C_N(s, t, u) \left( \frac{1+x}{2} \right)^s \left( \frac{1-x}{2} \right)^{N-s} \left( \frac{1+y}{2} \right)^t \left( \frac{1-y}{2} \right)^{N-t} \left( \frac{1+z}{2} \right)^u \left( \frac{1-z}{2} \right)^{N-u} \end{aligned}$$

を最大にするような  $x, y, z$  を見つける. つまり,

$$\hat{x}_{MLE} := \arg \max L(x, y, z),$$

$$\hat{y}_{MLE} := \arg \max L(x, y, z),$$

$$\hat{z}_{MLE} := \arg \max L(x, y, z)$$



によって  $x, y, z$  を推定する. このような推定量を最尤推定量と呼ぶ.

$X, Y, Z$  の測定は独立に行っているが,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  という物理的な条件があるため  $\hat{x}_{MLE}, \hat{y}_{MLE}, \hat{z}_{MLE}$  達は, 独立にはならない. 例として  $\hat{x}_{MLE} = \hat{y}_{MLE} = 1/\sqrt{2}$  の場合は,  $\hat{z}_{MLE} = 0$  に決まる. Eq. (1) が独立であるのと違って, 推定する際に物理的な制約も考慮した推定量になっている.

以上の結果は量子トモグラフィの枠組では, より一般的な形で Hradil [9] によって 1997 年に得られた. しかし, 最尤推定量の歴史は古く, 1930 年代には既に知られており, その数学的な性質も十分調べられている. 現在では, むしろ, 最尤推定量が良くない場合に, どのような推定量を使うべきかが統計研究での課題の一つとなっている. なお, 現在の量子トモグラフィでは, 量子物理の研究者も統計の重要性を認識しており, より現代的な統計手法も使うようになってきている (New Journal of Physics の量子トモグラフィ特集号の各論文及び編集者によるコメントも参照 [3]).

上の例では, 一番簡単な測定に限定していたが, 実際には, 「同時に測定できない」といった測定上の制約や期待値パラメータが満たすべき条件など, 量子論特有の条件に加えて, 測定データに応じて測定方法を変えるような推定方法も可能である. しかも, 実験の現場では, 本実験の前処理として, このような推定を行う. そのため, 統計学者が実験データだけもらって解析する静的な取り組みではなく, 物理学者と議論しながら, 測定方法のデザインも含めて, 解析方法を検討するといった動的な取り組みが必要になる. これが, 本研究集会で目指している統計と量子物理の連携イメージである.

### 3 異分野間連携の障壁

異なる分野間の連携において大きな障壁は, まず, 言葉の壁, 次に文化の壁があげられるであろう. 初めて異なる分野の研究者と接触すると, こういった壁を感じるが, これらは双方が努力して, 時間をかければ容易に乗り越えられる.

統計の周辺でいえば, ファイナンスやバイオインフォマティクスなどの融合領域ではこのような障壁を埋めるための様々な試みが行われている. 研究集会はもとより, 双方の分野に向けた解説記事やチュートリアルセミナー, またテキストも出版されている. 量子物理でいえば, 量子情報, 量子暗号, 量子計算などは, かなり融合が進んでいるように思われる. 特に量子情報の一部の研究者は, 物理学の強いバックグラウンドを持ちつつも, 数学者や工学系の研究者と議論でき, 連携する能力が高い.

それに比べると, 量子統計は参加者がまだ少ないせいか, その前段階である. つまり, 両方の言葉と文化を理解して話せる人が格段に少ない. そのため, 著者を含め本研究集会の参加者は, 今, まさに, 壁を乗り越えようとしている段階である. こ

表 1: Eadie *et al.* の指摘

| Physicists say | Statisticians say |
|----------------|-------------------|
| Determine      | Estimate          |
| Estimate       | Guess             |

のような最前線で得られる経験は、異分野間の連携を模索している他の研究者にとっても非常に有用であろう。そこで、実際に統計のバックグラウンドをもつ著者が、他の数学や物理の研究者と話した際に感じたことをまとめておく。

### 3.1 言葉の壁

連携の障壁として「言葉の壁」をあげた。これは、各専門分野での専門用語や概念があり、別の分野の人が、論文や研究発表を聞いてもさっぱりわからないということを目指す。例えば、数学者の書いたテキストでは、抽象的な定義・定理・命題等が並び、慣れないと読みづらい。統計学のテキストでも漸近理論など、数学的に精緻な理論は同様である。一方で数学者に言わせると、物理の本をばらばらめくっても何を書いているかさっぱりわからないという意見もある。

特に同じような問題を扱っていて、連携して研究を進めることで前進が期待できるにも関わらず、お互いの言葉が違いすぎて見落としてしまうケースがある。このような言葉の壁を乗り越えるためには、専門用語や概念について、当事者間で時間をかけて話しあう必要がある。つまり、ある程度は相手の分野を勉強する必要がある。

と、ここまでは誰もが理解できるし、思い当たる節もあるだろう。しかし、実際にはもう一つ重要な点がある。それは、「はっきりと定義されてはいないが、双方の分野で慣習的に異なる意味で使われている単語」の存在である。この点は、Eadie たちが “estimate” という単語を例に挙げて説明している [5]。Eadie 達による統計のテキストは物理実験の研究者を対象にしており、4 人の高エネルギー物理実験の専門家と 1 人の統計家 (W. T. Eadie) によって行われた統計の講義に基いている。彼らは 1 章において、表 1 のように、同じ単語が物理と統計の専門家の間で別の意味で使われていることを指摘している。したがって、実験研究者達が “estimate” について議論している時、統計学者が議論にまざるとちぐはぐなことになる。なお、このテキストは 1971 年の初版において著者の一人だった James が、他の著者の許諾を得て改訂、第二版を 2006 年に出版している。

これは理数系の分野に限らない。本質的に同じ問題は人文学の分野でもみられる。

文学者と社会科学者の間で、この本には歴史が書けているとか書けてないといった論争が、「歴史が書けている」という言葉の意味のコンセンサスを得ないまま行われているといった指摘が丸山真男によってなされている (p.134, 丸山 [11])。なお、丸山真男はいわゆる学問のタコツボ化を最初に指摘し、日本でタコツボ化が起きやすい理由を分析している。異分野間連携を模索している研究者にとっても彼の著書は興味深いであろう。

異なる背景の研究者同士の不毛な議論や論駁では、その大元の原因は、用語に関するコンセンサスの欠如による場合が多いように思う。聞き慣れない単語であれば、専門用語であると気付いて、その意味を相手に確認する。だからこそ、意味が理解しやすく、はっきりと定義されていない単語は見落とししやすいのである。また、量子統計の場合、推定や予測、状態、測定などといった単語はきちんと定義されているが、日常用語としても理解できるため注意を要する。これもちょっとしたノウハウである。

本稿では、量子統計という言葉の意味する所について、コンセンサスを次節で掲げておくことにする。原稿を読まれた際に、彼の研究は量子統計だとか量子統計とは呼べないといった不毛な議論を防ぐためである。細かい用語の意味確認を始めるときりがないため、本講究録の原稿を読まれる場合、定義されていない単語の意味には注意を払ってもらいたい。

### 3.2 文化の壁

単語レベルでのコンセンサスを取り、お互いに意思の疎通ができたとしても、それだけでは連携研究がうまくいくとは限らない。標語的に述べるなら、

**英語がぺらぺら話せてもアメリカ人と仲良くなれるとは限らない**

のである。例えば、アメリカ人と仲良くしようと思ったら、英語が話せた方が良いことは間違いない。しかし、それと同時に、アメリカ人の思考形態や価値観、歴史的背景なども理解する必要がある。つまり、辞書や文法書に記載されていない部分にもポイントがある。

著者は何度か量子情報の研究集会で発表したことがあるが、数学に強い研究者であれば、数学的な定式化は理解してもらえものの数式の背後にある部分は理解されていない。たとえば、ベイズ推定では、objective prior しか理解できない（認めない）研究者が多くて困惑した。

量子情報のような学際的な研究集会では様々な分野の人が参加・発表できる半面、各人の発表時間は 20 分程度と極めて限られている。その場合、研究成果を主張

しようとする、最低限の用語の説明で手いっぱい、背景的なことをカットせざるを得ない。工学的応用ではごく自然に出てくるベイズ統計にもあまり言及できない。このような研究集会で発表を繰り返しても、一向に肝心の部分が伝わらない。今回の共同研究集会では、このことを踏まえ、発表者を限定して一人一人の発表時間で40分を確保した。また、イントロの説明を丁寧にするようお願いした。これも、ちょっとした連携ノウハウである。

また、物理の側では、統計学の理論研究のスタンスは誤解されているか、そもそも理解されていないことが多い。どれくらい理解されていないか、比喩的に述べると次のようになる。

**一昔前のフランス人は、日本はニンジャの国だとか、サムライの国だと言って日本人は皆、時代劇に出てくるような格好をして歩いていると考えていた。**

この笑い話の真偽はともかくとして、今、量子物理と統計学は交流が始まったばかりのため、これぐらいの誤解は普通にある。このような誤解がもたらす危険性について触れておこう。

統計の理論は、かなり数学的側面が強いため、一般的に成立する結果を重要視する。そのため、サンプルサイズ（データ数）が十分大きい場合の理論など、理想的な仮定の下で得られた結果が多い。また、実際のデータにはほとんど触れずに論文を書いているケースも多い。従って、必ずしも実データ解析の経験が豊富とは限らないのである。

一方で、量子物理の実験に限らず、実際にデータを取得して統計的な推測を行う人たちの中には、統計の研究者にデータを渡せば、うまく結論を出してくれると期待してしまう人もいる。統計の理論研究者を実データの分析に長けた技術者と誤解しているのである。確かに、典型的なデータであれば、一般教養としての統計学の知識で可能ではあるが、実際のデータには、データが発生する現場毎に特有の泥くさい難しさが潜んでいるため簡単ではない。

統計理論の研究者に対する誤解から、応用の人は過剰な期待をしてしまい、期待に応えられないと、それはやがて失望へと変わるのである。原因は、統計の理論研究が他の分野の人たちに誤解されている事である。

したがって、本研究集会では、初日に統計の理論研究の最前線に触れる機会を作った。ニンジャを期待しているフランス人に、今の日本にニンジャはいないということを理解してもらうのである。理論の中身ではなく、むしろ、すぐに使えるわけではない一般論や抽象論が調べられているということを理解してほしいのである。お互いの理解なくして、真の協働はありえない。このようなプロセスは、いわば協働研究の土台作りであり、これもまた連携の実践的なノウハウである。

### 3.3 独学による偏った理解

一般に連携研究の初期の段階においては、自分の専門以外の部分を体系的に学ぶ機会はない。そのような場合、独学で必要な部分のみを学ぶことになる。特に数学に強い研究者の場合は、数学的に簡明な教科書(文章の説明が少ない)を読んで、数式を用いた定式化や計算、証明をフォローして理解する。そのため、かえって背景にある多様な側面は見落としてしまう。

統計の場合には、例えば、理学と工学という二つの側面がある。つまり、量子トモグラフィの項でも述べたように、統計の応用には新たな法則の発見を目的とする科学的立場と、既にわかっていることを応用する技術的立場の二つがある。統計学は本来、このような相異なる立場からのニーズを踏まえて発展してきた。統計の体系的な教育を受ければ自然に両方の考え方が身に着くのだが、必要に迫られて独学する場合、本人が理解しやすい教科書を読むため偏ってしまう可能性がある。例えば、「〇〇研究者のための統計入門」といった本は、〇〇の研究者にとって大変読みやすく書かれている半面、学問としての全体像は偏ったものになりがちである。異分野の研究者が統計の研究者と連携する場合、このことがかえってコンフリクトを招くこともある。

特に量子統計の場合、物理を背景とする理論研究者が多く、科学的側面はよく理解されているが、技術的側面はあまり理解されていない。また、統計を実際に使う立場にある物理実験の研究者も、統計学の工学的な側面には詳しくないようである。例えば、第一線の実験研究者であってもベイズ統計は知らなかった。工学的な話題は物理のカリキュラムでは学ぶ機会がないため、本研究集会でも、ベイズ統計に関するチュートリアルを入れている。偏った理解を正す最良の方法は体系的な教育を受けた人と接することである。これも連携のちょっとしたノウハウである。

情報理論と統計学を混同することによる誤解もある。まともな統計の研究者であれば、現在の統計学がどういう歴史的な背景で成立してきたのか [13] 知っているし、情報理論との違いも明確に理解できている。ところが、昨今、統計学も含む広い意味で、〇〇情報学という言い方が浸透してきた。科研費の分類上も統計学は統計科学という名称で情報学の下に入っている。また、情報理論の標準的な教科書である Cover and Thomas [4] でも統計の理論的な話題が扱われているし、根底にある確率論など共通する部分も多い。こういった事情から、量子情報の研究者は統計を情報理論の延長線上で考えている節がある。そのため、情報理論とも共通する点推定論に関しては詳しいものの情報理論ではなじみのない話題、例えば、信頼区間、許容性、improper prior といった概念は知らないことが多い。

### 3.4 壁は自分たちの中にある

以上、統計学に関して、幾つかの誤解や偏った理解について述べてきた。連携が進むにつれて、これらは解消されていくだろう。大切なのは、お互いがこのような文化の違いを認識して、かつ相手の文化に対して敬意を払うことである。あくまでたとえ話として、以下の例をあげてみる。

アメリカ人の Attama Kataiya さんが日本にやってきて日本人の家に招かれた時のこと。Kataiya さんは玄関から土足で家に入ってくる。日本人は慌てて、日本の家屋では靴は玄関で脱いで、それから中に入ると説明する。しかし、Kataiya さんは、欧米諸国ではそんな慣習はないと言い放ち、もっともらしい理由をつけて日本はおかしいと主張する始末。

Kataiya さんは、文字通り、日本文化を踏みにじっているのである。自分の専門分野に誇りをもち、真剣に取り組んでいる研究者ほど、ついつい Kataiya さんになりがちである。異なる分野間で連携して研究を進める場合、私たちは Kataiya さんのようにはならないよう注意すべきである。（繰り返すがアメリカ人は比喻であり、Kataiya さんは架空の人物である。）

## 4 新しい学術領域としての量子統計の提案

2節で、統計と量子物理の研究者が協働して取り組むべき課題のイメージを提示した。また3節では、量子物理サイドでの統計の理論研究に対する誤解や統計学の偏った理解について説明した。以上を踏まえて、本講究録での量子統計という言葉の意味をはっきりさせておこう。

### 4.1 量子統計のコンセンサス

まずは、(古典)統計学の定義を確認しておく。

#### Definition 4.1 古典統計

統計学とは、手元に得られたデータ（観測値）から、そのデータを発生させている源に関して推測する手法を系統的に扱う学問である。ただし、データの発生は決定論的ではなくて何らかのランダムな要素が入る。

統計に詳しい研究者には、上の定義は、いわゆる推測統計をさしていることを付記しておく。記述統計をはずしているのは、以下の量子統計の定義をスムーズに行

うためである.

#### Definition 4.2 量子統計

量子系の統計的推測とは有限データ（観測値）に基いた、データの発生源（量子論が無視できない系）に関する推測のことを指す. ただし,

1. データの発生は決定論的ではなくて何らかのランダム（量子論含む）な要素が入る.
2. データの取得方法（測定方法）も考える.

量子系の統計的推測をここでは「量子統計」と呼ぶことにする. まだまだ未発達のため量子統計学とは呼ばない. 上の定義を見てもらえればわかるように, この講究録での量子統計は, 統計力学や統計物理とは異なることに注意しておく. 著者の個人的な経験でも全く統計学になじみがない人の場合, 語感のみで勘違いするケースが多い. (ただし, 根底に確率論があるため全く関連がないともいえない.) 量子統計との対比で従来の統計学を古典統計などとも呼ぶ. 感覚としては量子力学と古典力学のような意味合いである. また, 統計学では, ベイズ統計に対して非ベイズ的な統計を古典統計と呼ぶ流儀もあるので注意する.

本稿ではできるだけ技術的な詳細には立ち入らないようにしているため, 測定の記述に関しても触れていない. 2の「測定方法を考える」といった部分は, いわゆる実験計画法とは異なるものを指している. (ただし, 実験計画法の考え方を量子論的な実験に応用するのは興味深い話題の一つである.)

## 4.2 Holevoによる定式化との違い

上で述べた量子統計は, Holevoによる定式化よりも概念的に広いことについて説明しておく. ここは専門家向けの内容になるため読み飛ばしても良い.

統計の理論研究者にとって, Waldによる決定理論的な定式化 [17] はおなじみであるが, Holevoは量子系の統計的推測に, 同様の論理を導入し決定理論的な定式化を行った [7]. (本稿は解説が目的ではないため詳しくはHolevo自身の教科書 [8] を参照.) かなり粗く述べると, 古典統計において統計的決定理論の枠組みで望ましい推定方法を探す所を量子統計では望ましい測定方法を探すという考え方に置き換えたのである.

Holevo自身は統計学者ではなく, 量子論や統計学の原理的な側面に関心があったと思われる. 決定理論の意味で望ましい測定を探すというのは理論的に自然ではあるが, 実際の実験では, むしろ, 実験的に準備できる測定と平易な推定方法で望ましいものに興味があるだろう. 特に, 2節にあるような量子トモグラフィでは,

測定方法をあらかじめ固定してデータを取ることが多い。それは従来の統計的推測の問題に帰着する。そのため、Holevo の流れを組む研究者にはつまらなく見えるかもしれない。また、理論的にも測定方法を変えることで推定精度が改善される可能性がある。従って、測定方法を固定して推定方法だけ工夫するのはナンセンスであり、量子統計には含めないという立場もある。これを 狭い意味での量子統計 とここでは呼ぶことにする。

狭い意味での量子統計は、古典統計との数学的な対応が見やすく論理も非常に明快である。このような Holevo の流れを組む研究では量子論の深遠さや数学的な課題の追求が中心に見える [6]。しかし、既に述べたように、本来、統計学とは限られたデータから対象について何らかの推測を行うことを主眼としており、その点を中心に据えたのが本稿における量子統計の定義である。

狭い意味での量子統計がカバーしていない話題には、例えば、予測分布の理論があげられる [1]。予測分布は信頼区間の構成にも使えるのだが、主に工学的応用の場面で力を発揮する考え方である。そのため、Holevo をはじめ、量子論の原理的な側面（理学！）に興味を持っている研究者には見落とされていた。量子トモグラフィにおけるベイズ推定量の最適性の議論は、ベイズ予測分布の考え方を使うと明快になる [15]。また、波動関数を（比較的少数の）有限データから推定する問題も同様に見落とされてきた。こちらは量子ベンチマークの研究とも関連している [16]。このようなケースでは、測定を固定して考えても量子論特有の問題が生じ、古典統計をそのまま適用するわけにはいかない。量子物理という素材に対して、統計学者が新たに料理すべき課題が出てくるのだ。狭い意味での量子統計はこのような問題をとりこぼしている。

### 4.3 2種類のアプローチの統合

統計学は、確かに統計的決定理論という数学によって美しく記述される。しかし、本来、統計学とは限られたデータから対象を推測することを主眼としており、統計的決定理論が先にあるのではない。なまじ数学に強い（統計以外の）研究者ほどこういう誤解をする傾向があるように思う。この点について、主に量子情報の研究者向けに補足説明する。

まず、統計的決定理論と実際の推測との関係についてみていく。ある応用分野では、経験的に良い推定方法があり、実際に色々なデータに使ってみると良さそうな推定値が得られる。なぜうまくいくのだろうか、ひょっとしたら特別なケースだけ良い推定になっているのか、といったことを定量的に判断するために統計的決定理論が指針を与えてくれる。望ましい推定方法が複数提案されていて、推定した値が一致しない。どれが良いのか統計的決定理論が教えてくれる。このように現実の問



題から統計的推測を考えていくアプローチを（古典統計における）ボトムアップ的なアプローチと呼ぶことにする。

歴史的には、いわゆる漸近理論の発達により、その後、抽象的な設定で、もっと優れた推定量が理論的（数学的）に発見されることもあった。このように現実の問題設定をいったん忘れて、数式だけを眺めて推定方法を考えるアプローチを（古典統計における）トップダウン的なアプローチと呼ぶ。

重要なのは、統計学は、ボトムアップとトップダウンの両方のアプローチが相互に刺激あって発展してきたということである。狭い意味での量子統計はトップダウン的なアプローチに相当する。Holevoが精力的に研究を進めていた1970年代は光通信における量子雑音の除去という問題意識があった。このような応用を念頭に置いていたため、ボトムアップ的なアプローチもそれに付随するものしかなかった。一方で、実験技術の進歩と、科学的な興味から工学的な応用への移行が進んだことで、多様な問題が現れボトムアップ的なアプローチが次第に増えてきた [12]。そこで、本研究集会では、本来の統計学のあるべき姿に沿って、両方のアプローチを含む新たな学術領域として量子統計を規定した。

最後にトップダウン的なアプローチだけで考えるのが難しい問題の例を一つ挙げておこう。

#### 例: 古典的なノイズも含めたパラメータ推定

未知パラメータをもつ密度行列が与えられているとする。目的はうまく測定装置を用いて、未知パラメータを推定することとしよう。簡単のため使える測定装置は  $A, B$  の2種類とする。測定装置  $A$  を用いる場合には、量子論に起因する測定値のばらつきは小さいが装置自体による古典的なノイズが混ざる。測定装置  $B$  を用いる場合には、量子論に起因する測定値のばらつきが大きいものの古典的なノイズは小さい。どのように比較すればよいだろうか。

これは精密測定が必要な実験で直面しうる問題である。しかしながら、狭い意味での量子統計では扱えない。理由は簡単で、測定装置の 古典的なノイズに関する統計モデルを立てる 必要があるからである。この部分は実際には、特定の物理系で測定に携わる物理学者と統計学者が古典統計の範囲で議論する部分である。ノイズといっても、その分布は非対称分布、裾の厚い分布、カットオフのある分布など様々な可能性があり、次元の高いパラメータを推定する場合、ノイズも高次元の分布になり、それ自体が統計研究の対象に入ってくる。一方で、量子論に起因する部分も混ざるため完全に古典統計の範疇に入るわけでもない。本講究録で定義した量子統計はこのような問題もカバーしているのである。なお、測定装置の自由度を増やしても同様である。

ここで述べたことは、数学としての価値はないだろう。しかし、単に統計学の数学的定式化を拡張するのではなく、本来の統計学の意味を明確にして、量子統計を定義することは極めて重要である。可換なものを非可換化するといった数学的拡張の話ではなく、本質的に新たな数学・統計学を生み出すからである。

#### 4.4 量子情報を越えて

量子統計の応用は、必ずしも量子情報やその関連分野の実験に限定されない。3節でみたように物理学者の間では、量子統計は量子情報の延長線上にあると誤解されているように思う。また、本稿で定義している「量子統計」の目的は、量子論の深遠さや数学的な課題の追求には限らない。そのため、いわゆる量子情報とは切り離して考えることも重要である。実際、2節で見た量子トモグラフィ以外にも、量子統計独自の問題と応用先が十分にあり得ると著者は考えている。

例えば、データ数を稼ぐのにコストがかかるため断念してきた実験。量子論に由来する制約を考慮しつつ、統計的手法の工夫をすることで、少ないデータでもある程度の推論が可能になるかもしれない。科学実験では国費の割合が高いことと、量子物理の基礎実験は大規模な実験に比べ国内のいたる所にあることを考慮すれば、わずかなコスト減の工夫それ自体も非常に重要である。逆に光格子時計のように世界最高精度を競うような課題であれば、基本的な統計の教育を受けた研究者が参画するだけでも多くの貢献が期待できる。5節に述べるように、量子物理の研究において統計学者と連携するといった試みはほとんど知られていないからである。

### 5 Q-statsの活動を通じて

Q-statsとは2010年4月に発足したメーリングリストである。量子系の統計的推測に興味をもつ理論物理・実験物理の若手研究者（学生含む）が参加している。著者は、このメーリングリストを通じて、主に物理を背景とする、量子統計に興味をもつ若手研究者と交流することができた。従来の融合領域には珍しく、草の根的な活動組織である。つまり、財政母体もなければ、主導する教授がいるわけでもない。

統計と量子物理の連携を目標に、Q-statsに参加しているメンバーで行ってきた活動は多岐にわたる<sup>1</sup>が、その中で明確になったことがある。それは、

1. 異なる分野間の連携には様々なフェーズがあること
2. 統計と量子物理の連携は、実はこれまでにない連携であること

<sup>1</sup><http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~ftanaka/jst/qstats/index.html>

である。これまで幾つかの場面で断片的に話していたが、詳しく説明する機会がなかったなので、ここに記しておこう。

## 5.1 異なる分野間での連携の成長フェーズ

異なる分野間の連携には次のようなフェーズがある。

A 萌芽期

B 発展期

C 成熟期

連携の萌芽期の特徴は以下のようになる。

- それぞれの分野から異端と見られている
- 目立った成果はない
- 新しい試みであることは理解されるが、懐疑的な見方が根強い

比喩的に述べるなら **連携の萌芽期とはクリームあんみつが出始めたころ**に相当する。クリームあんみつは、洋菓子とは呼べないし、伝統的な和菓子の世界からも恐らく異端と見られていたであろう。

逆に連携の成熟期の特徴は以下のようになる。

- それぞれの分野で重要性が認識されている
- 国内外で多くの優れた成果が知られている
- 融合領域が確立、双方から受け入れられる

先ほどの比喩で述べるなら、**連携の成熟期とは和風スイーツというジャンルが確立した現在のことを指している**。和菓子にクリーム (e.g., クリーム大福) を混ぜたり、逆に洋菓子に和の要素 (e.g., 抹茶ロール) を混ぜるといったことが両分野の老舗でも受容されている。ただし、数学と諸分野間の連携の成熟期にはもう一つ特徴がある。

- 欧米諸国がリードしており、日本が遅れを取り戻すという構図

連携の発展期は萌芽期から、成果が出始めて成熟期に至る途中段階をさしている。一般的に線引きするのは難しいと思われるため、以下では基本的に A と C の段階の対比を見ていく。A と C の比較を表 2 にまとめておく。また、連携のフェーズと、その結果生じた融合領域の研究のフェーズとは別物である。研究そのものを深く掘り下げていくのは、むしろ成熟期に入ってからである。

表 2: 異分野間連携の成長フェーズ比較

|       | A: 萌芽期     | ←→ C: 成熟期              |
|-------|------------|------------------------|
| 周囲の評価 | 両分野から懐疑的   | 学際領域として認知・受容的          |
| 研究資金  | 両分野で募集枠なし  | 様々な募集枠（重複応募可）          |
| 論文雑誌  | 査読にすら回らない  | 両分野で特集号が組まれる<br>専門誌の創設 |
| 成果    | 説得的な結果が少ない | 国内外で結果が多い              |

## 5.2 統計と量子物理の連携は萌芽段階

統計と量子物理の連携は、国内外に先行例がない全く新しいタイプの連携 (A: 萌芽期) である。研究集会などでそう説明すると、時折、そのような連携は既にあると主張する人がいる。よくよく話を聞いてみると、彼らは似たようなものと誤解していることがわかる。そこで、以下、似たような連携と相違点について述べておくことにする。

例えば統計物理。特に量子統計力学は、量子物理と確率論の研究者が連携して取り組むべき分野としてよく知られている。一方、量子系の統計的推測という名称を量子統計と省略してしまうと統計は統計力学、統計物理の意味にとらえられ、量子統計力学と誤解される。本稿での量子統計の定義は4節にあるとおりである。英語に訳すと、Quantum Statistical Inference が適切なように思う。これらは、数理統計学 (Mathematical Statistics) になじみのない物理系の研究者によくある誤解である。

他にも物理と数学の連携は昔から知られている。連携して研究することで、優れた成果も得られてきたし、だからこそ、誰もが連携の重要性を認識している。つまり、これらの連携は既にCの段階に入っている。ところが、物理と数学の連携という時には、実際には理論物理と解析・幾何・代数・確率論が想定されており、一般に統計学は入っていない。

昔は、情報理論や暗号理論などの応用数学も、物理との連携は想定されていなかったのだが、これらと量子物理との融合領域は、現在では、理論上も応用上も重要な分野として認識されている。そのため、理論・実験問わず量子物理の研究者は、情報理論や暗号の専門家との連携を始めており、既にCの段階に入っていると言えよう。そして、3節で述べたように、情報理論と統計学を混同すると、ここでも誤解が生じる。

もうひとつよくある誤解として、カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU) を挙げるケースもある。Kavli IPMU とは宇宙の起源の解明を共通の課題に据えて、

数学と物理学の連携研究を推進している研究拠点である。Kavli IPMU では、天体観測データの解析において統計研究者と連携することを主張している。当初の研究構想では「実験物理や観測天文学からの幾何学的データを扱う幾何統計学を発展させる」と述べている。<sup>2</sup> これらは物理学と統計学との連携を示唆している。統計の理論研究にとっても重要な貢献が期待できるが、量子物理ではなく、むしろ天体物理や天文学との連携である。物理と統計という単語だけを眺めると、ここでも誤解が生じる。

また、新規性という点でも違う。統計学はデータ解析のための道具を与えてきたため、統計と物理の連携と言えば、実験物理や観測データを分析する理論物理の研究者との連携が自然に思いつく。そのため、昔からこのような実験や観測データの解析では統計学者も連携してきた [2, 5]。さらに海外では PHYSTAT と呼ばれる、素粒子実験や宇宙物理実験・観測の研究者と統計の理論研究者による研究集会が何度も開催されている。つまり、Kavli IPMU で掲げている統計学との連携は（研究内容は新しいかもしれないが）世界的には既に C の段階に入っている。

一方で、本稿で述べている量子物理と統計の連携は、これまでは実験現場でのニーズが弱かった。つまり、わざわざ統計学者と連携しなくても、物理学者が教科書レベルの統計的手法を学んで使えば、それなりに解析できていたのである。ところが技術の進歩によって量子論まで踏み込んだ統計学が必要になってきた。また、純粋に数学的な理論としての量子統計の結果はそれなりに蓄積しているのだが [6]、実験物理サイドとのギャップが大きい。本稿では、統計と量子物理の研究者が協働して、このようなギャップを埋めることを主張している。従って、技術の変遷と時代のニーズに即した非常にタイムリーな連携を提案していることになる。本来の統計学の精神を正に継承しているのである。また、このような連携に向けた組織的な取り組みは、著者が調べた限り国内外に例がないのである。

### 5.3 新しい連携研究で世界をリード

統計学の周辺で現在、成熟期に入っている連携はバイオインフォマティクスや、データマイニング、脳科学、ファイナンスなどが挙げられる。ところが、これらの分野は必ずしも日本がリードしているとは言い難い。むしろ、海外の成功事例を目の当たりにして日本がフォローしているようにも思える。一方で、上で詳しく述べたように、量子物理と統計の連携は、まだ国内外に先行例のない萌芽段階にある。従って、このような連携を育てて、連携ならではの成果を出していけば日本が独創的な連携研究で世界をリードすることが大いに期待できる。

<sup>2</sup>[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/kagaku/toplevel/07120413/002.htm](http://www.mext.go.jp/a_menu/kagaku/toplevel/07120413/002.htm)

しかし、実際には連携の萌芽期から次のステージにあがるのは極めて難しい。著者の経験に基いて、連携の萌芽段階で苦勞する点を挙げると以下ようになる。

- 論文が双方の分野で学術雑誌に掲載されにくい
- 研究資金がとりづらい（募集がない、もしくはあっても審査員が両分野に精通しておらず適切な評価を下せない）
- 周囲には理解者より誤解者が多く discouraging

例えば、既に連携の成熟期にあるバイオインフォマティクスでは、生物の研究者も統計の研究者も、そういった研究分野があることを理解しているし、それぞれの研究雑誌に論文も多数掲載されている。研究プロジェクトもあるし、大学のポストでもバイオインフォマティクスの研究者に限定して募集するケースもある。

これに対し、量子統計は研究分野がほとんど認知されていないし、既に述べたように様々な誤解も多い。募集をかける側が想定していない連携だから、研究資金獲得以前に、そもそも募集枠が作られない。統計の雑誌に論文を投稿すると、これって物理だよと編集者に付き返され、物理の雑誌に投稿すると、これって物理じゃないでしょ？ と編集者に付き返され、査読にすら回らないというのが現状である。また、査読者も統計学を理解しておらず、量子情報、特に、物理や情報理論的な観点で判断するため、適切な評価がされているとは言い難い。

新しい方向性の研究が理解されないことは珍しくない。おかげで、著者は複数の分野の背景や興味を理解して説得的な文章を書く能力を訓練することができた。また、周囲の不理解や誤解にも負けない精神力を鍛えることができた。

問題なのは、このような研究以外の苦勞が多いと、人材が集まらないという点である。能力の高い若手が、キャリア形成で不利になるため、異なる分野間の連携に対して消極的になる。文部科学省数学イノベーション委員会の中間報告<sup>3</sup>によれば、今後は個人間の連携でなく、組織的に分野間の連携を促す活動が重要であると指摘している。ところが、現在の異なる分野間の連携を支援する仕組みは、実際には、成熟期（Cの段階）を想定しており、萌芽段階の新しい連携に向けた取り組みを支援する仕組みが抜けている。（数学者の発想による 新たな分野との連携研究 を支援するという意味で、JST さきがけ/CREST 数学領域は唯一の特筆すべき例外だった。）

著者が実際に Q-stats の活動を通じて気が付いたのは、直面する課題や必要な支援策は、連携の萌芽期と成熟期で違ったものになるということである。成熟期では、国内外の競争が激しいため、多額の予算を投入して研究者の質と量の確保に努める必要がある。そして、そのための支援策は既に幾つかあり、例えば「世界トップレ

<sup>3</sup>[http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/gijyutu/gijyutu17/002/houkoku/1325349.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/gijyutu/gijyutu17/002/houkoku/1325349.htm)

表 3: 成長フェーズに応じた課題と支援策

|       | A: 萌芽期         | ←→ | C: 成熟期     |
|-------|----------------|----|------------|
| 競争    | 横並び・様子見        |    | 国内外での競争が激化 |
| 人材    | 集まらない          |    | 質と量の確保が課題  |
| 必要な支援 | 小規模でも継続的な支援が重要 |    | 大規模化       |

ベル研究拠点プログラム (WPI)」が挙げられる。一方、その前段階、A や B の段階というのは重要性に気付いている人が少なく、一般の競争的研究資金では不利である。精神論や理想論だけでは人材は集められないためなんらかの支援策が必要なのは間違いない。成熟期に至るまでは時間がかかるため、小規模でも継続的な支援が必要である。既に募集は終了しているが、JST 数学領域 CREST (5 年間) はこのような要件にマッチしていた。表 3 にフェーズに応じた課題と支援策をまとめておく。

Q-stats の経験からもわかるように、従来にない、誰も想定していなかった分野間での連携を、組織的に推し進めるというのは並大抵のことではない。そのようなことができる人材は、女性研究者の比率よりもはるかに少ないだろう (おそらく 1 % 未満)。従って、男女共同参画といった施策を打つ以上に、まだ認知されていない新たな連携を進められる人材に対する、何らかの施策を打つべきである。こういった萌芽期の段階を手厚く支援する仕組みが充実すれば、量子統計に限らず、日本が異分野連携型の研究全般において世界をリードできる可能性が開けてくる。

## 6 終わりに

量子論というとしり込みする統計研究者も多いが、例えば、ファイナンスでは特有の専門知識が必要であるし、それに付随して高度な数学が必要になるケースもある。それにも関わらず、現在は多くの統計学者が興味をもち、ファイナンスの知識を学び、分野を越えた連携研究を進めている。統計学は時代のニーズや情勢を踏まえて発展してきた学問である。今後は、量子物理の実験においても、同様の状況になっていくだろう。それはまた、統計学にとっても新たな潮流を生み出すと著者は確信している。

この原稿に触発された量子物理、統計の両分野の若人が、量子統計に参画すること、そして、国家的な推進と支援体制が整うことを祈って、序文としたい。

## 謝辞

本研究集会の開催にあたって数理解析研究所より多大なご支援をいただきました。また、文部科学省「数学・数理科学と諸分野との連携研究ワークショップ」に採択され、旅費の補助も受けております。深く感謝いたします。2節の原稿を書くにあたって、杉山太香典氏との議論やコメントが大変参考になりました。最後に、このような研究集会の趣旨に賛同いただき、お忙しい中、異なる分野向けに丁寧な説明を準備していただいたすべての発表者及び、積極的に議論に加わった多くの参加者に感謝いたします。

Organizer

Fuyuhiko Tanaka

## 2.3 節の補足

2.3 節の見積もりにおいては次の平易な補題を用いている。

### Lemma

$n$  次元複素正方行列において、互いに可換でかつ  $\mathbf{R}$  上一次独立な Hermite 行列の数は高々  $n$  個である。

### Proof.

互いに可換でかつ  $\mathbf{R}$  上一次独立な Hermite 行列を  $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$  と表し、 $l > n$  として矛盾を導く。まず、互いに可換な Hermite 行列なので、よく知られているように共通のユニタリ行列を用いて対角化できる。

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= U \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^{(1)} \end{pmatrix} U^\dagger \\ &\vdots \\ X^{(l)} &= U \begin{pmatrix} x_1^{(l)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^{(l)} \end{pmatrix} U^\dagger \end{aligned}$$

それぞれの行列で対角成分  $n$  個を並べたベクトルを  $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(l)}$  と書くとこれらは非零な  $n$  次元の 実数 ベクトルである。



さて、線形代数でよく知られているように  $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(l)} \in \mathbf{R}^n$  に対して  $l > n$  であれば、一次従属であり

$$r_1 \vec{x}^{(1)} + \dots + r_l \vec{x}^{(l)} = 0$$

を満たす 実数  $r_1, \dots, r_l$  が必ず存在する。ところが、その時、

$$r_1 X^{(1)} + \dots + r_l X^{(l)} = 0$$

を意味するから  $\mathbf{R}$  上一次独立であるという仮定に反する。従って、 $l \geq n$ . *Q.E.D.*

密度行列  $\rho$  の各成分は互いに可換で一次独立な observable (Hermite 行列) 達の期待値パラメータとして表せる。ただし、 $\text{Tr} \rho = 1$  の制約から次元が 1 下がり、最大で  $n-1$  個のパラメータが同じ測定によって一度に推定できる。すべての期待値パラメータをこのような  $n-1$  個ずつの排反な組に分けられるわけではないので、異なる測定の数にはさらに増えると考えられる。2.3 節での評価は  $n = d^2$  と置いている。

## REFERENCES

- [1] J. Aitchison and I. R. Dunsmore: *Statistical Prediction Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [2] 赤池 弘次 (編集) : 科学の中の統計学—現代科学と統計数理の接点, 講談社, 東京, 1987.
- [3] K. Banaszek, M. Cramer and D. Gross: Editors' note, *New J. Phys.*, **Focus on Quantum Tomography** (2012).
- [4] T. M. Cover and J. A. Thomas: *Elements of Information Theory*. 2nd ed., Wiley-Interscience, New York, 2005.
- [5] W. T. Eadie, D. Drijard, F. E. James, M. Roos and B. Sadoulet: *Statistical Methods in Experimental Physics*. North-Holland Publishing, Amsterdam, 1971.
- [6] M. Hayashi: *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*. World Scientific, Singapore, 2005.
- [7] A. S. Holevo: Statistical Decision Theory for Quantum Systems. *J. Multivariate Anal.*, **3** (1973), 337–394.

- [8] A. S. Holevo: *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [9] Z. Hradil: Quantum-state estimation. *Phys. Rev. A*, **55** (1997), R1561-R1564.
- [10] F. E. James: *Statistical Methods in Experimental Physics*. 2nd ed., World Scientific Publishing, Singapore, 2008.
- [11] 丸山 真男: 日本の思想, 岩波書店, 東京, 1961.
- [12] M. Paris and J. Řeháček: *Quantum State Estimation*. Springer, Berlin, 2004.
- [13] デイヴィッド サルツブルグ (竹内 恵行, 熊谷 悦生 訳): 統計学を拓いた異才たち, 日本経済新聞出版社, 東京, 2006.
- [14] 高橋 克徳, 河合 太介, 永田 稔, 渡部 幹: 不機嫌な職場, 講談社, 東京, 2008.
- [15] F. Tanaka and F. Komaki: Bayesian predictive density operators for exchangeable quantum-statistical models. *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 052323.
- [16] F. Tanaka: Bayesian estimation of the wave function. *Phys. Lett. A*, **376** (2012), 2471–2476.
- [17] A. Wald: *Statistical Decision Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1950.